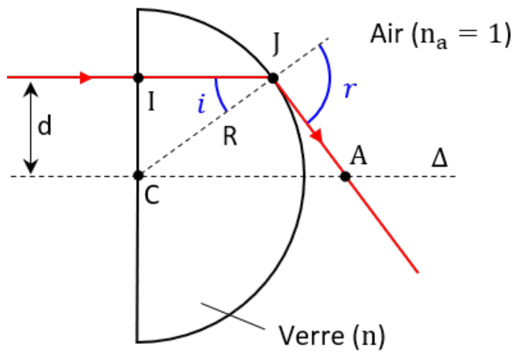
Optique géométrique | Chapitre 1 | Correction TD (O1)

Exercice n°1 • Réfraction par un hémi-cylindre *cours*

1) En I, le rayon n'est pas dévié car incidence normale.

2)



3) Au point J :

$$n \sin(i) = \sin(r)$$

4) Si le rayon émergent est tangent à l'hémi-cylindre, alors $r = \pi/2$. Ainsi (loi de Snell-Descartes + triangle IJC) :

$$\sin(i) = \frac{1}{n} = \frac{d}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{d = \frac{R}{n}}$$

5) Dans les triangles CJA et CJI, on a :

$$\cos(i) = \frac{R}{CA} = \frac{IJ}{R}$$

De plus, $IJ = \sqrt{R^2 - d^2}$. Ainsi :

$$CA = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - d^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 - (1/n)^2}} = \boxed{\frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}}}$$

6) Il y a une réflexion totale dans l'hémi-cylindre.

Exercice n°2 • Couleur d'un laser ★☆☆

1) C'est un laser vert.

2) La longueur de l'onde lumineuse dans le plexiglas est :

$$\lambda_{\text{plexiglas}} = \frac{\lambda_0}{n} = \boxed{344 \text{ nm}}$$

3) La couleur est donnée par la fréquence de l'onde ou sa longueur d'onde **dans le vide**, qui ne change au cours de la propagation. La couleur du laser ne change donc pas, elle reste verte.

Exercice n°3 • Réfractomètre de Pulfrich ★⯪☆

1) Puisqu'il faut une réflexion totale, le verre du réfractomètre doit être plus réfringent que le liquide : $\boxed{n < N}$.

2) On exprime la condition limite de réflexion totale en J :

$$N \sin(\beta) = n$$

À l'aide de la deuxième loi de Snell-Descartes de la réfraction exprimée en I, on a :

$$\sin(\alpha) = N \sin(r)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} n &= N \sin(\beta) = N \sin\left(\frac{\pi}{2} - r\right) = N \cos(r) \\ &= N\sqrt{1 - \sin^2(r)} = \sqrt{N^2 - \sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

Exercice n°4 • Prisme à réflexion totale ★★☆

1) Le rayon parvient en incidence normale sur la face supérieure, il n'est donc pas dévié à son entrée. Sur la première face inférieure l'incidence est $i = 45\,°$. La réflexion sera totale si $i > i_{lim}$ l'angle de réfraction limite défini par :

$$n \sin(i_{lim}) = 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Ainsi,

$$i > i_{lim} \quad \Rightarrow \quad \sin(i) > \sin(i_{lim}) = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n > 1,41 = n_{min}}$$

Dans ces conditions le rayon est complètement réfléchi et une construction géométrique assure qu'il se propage horizontalement jusqu'à la deuxième face inférieure. Il l'atteint avec le même angle de 45 ° et subit donc une réflexion totale qui le fait remonter verticalement jusqu'à la surface supérieure qu'il atteint en incidence normale et traverse donc sans déviation.

2) Les réflexions ne dépendent pas des indices, la trajectoire des rayons réfléchis n'est donc pas modifiée.

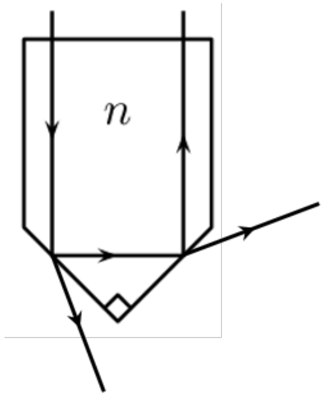
3) L'indice du milieu extérieur ayant changé, l'angle de réfraction limite change également. Cette fois :

$$n \sin(i_{lim}) = n_e \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Nous n'avons pas de réflexion totale si :

$$i < i_{lim} \quad \Rightarrow \quad \sin(i) < \sin(i_{lim}) = \frac{n_e}{n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n < 1,89 = n_{max}}$$

4) Il existe un rayon réfracté qui se rapproche de l'interface puisque l'indice du milieu incident est supérieur.



L'angle de déviation vaut :

$$D = r - i = \arcsin\left(\frac{n}{n_e}\sin(i)\right) - i = 8,9\,° > 0$$

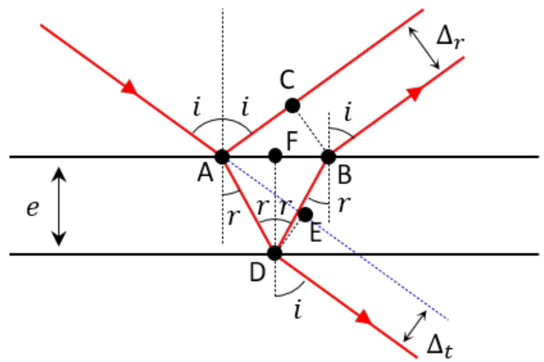
Le rayon réfracté sur la deuxième face inférieur sera dévié du même angle mais vers le haut, toujours pour se rapprocher de l'interface.

5) Dans le cas où le prisme est plongé dans l'air, les réflexions totales assurent que l'intensité du rayon reste constante à chaque réflexion. À l'inverse il perd en intensité à chaque réflexion s'il existe un rayon réfracté.

La mesure de l'intensité du rayon qui ressort verticalement du prisme permet donc de détecter s'il est plongé dans l'eau ou dans l'air.

Exercice n°5 • Lame à face parallèles ★★☆

1) & 2) Légendons tous les angles. Tous les angles des rayons à l'extérieur de la lame valent i et ceux à l'intérieur valent r. Les rayons sont donc bien parallèles.



3) Dans le triangle ABC, on a : $\cos(i) = \dfrac{\Delta_r}{AB}$

Dans le triangle ADF, on a : $\tan(r) = \dfrac{\sin(r)}{\cos(r)} = \dfrac{AB/2}{e}$

Loi de Snell-Descartes : $\sin(i) = n \sin(r)$

Relation sin/cos $\forall\, \theta$: $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

On combine toutes ces relations :

$$\Delta_r = AB \cdot \cos(i) = 2e\frac{\sin(r)}{\cos(r)}\cos(i) = 2e\frac{\sin(i)/n}{\sqrt{1-(\sin(i)/n)^2}}\cos(i)$$

Ainsi :

$$\boxed{\Delta_r = \frac{2e\sin(i)\cos(i)}{\sqrt{n^2-\sin^2(i)}}}$$

4) Dans le triangle ADE, on a : $\sin(i-r) = \dfrac{\Delta_t}{AD}$

Dans le triangle ADF, on a : $\cos(r) = \dfrac{e}{AD}$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\Delta_t &= AD \cdot \sin(i-r) \\
&= \frac{e}{\cos(r)}\left(\sin(i)\cos(r) - \cos(i)\sin(r)\right) \\
&= e\left(\sin(i) - \cos(i)\,\frac{\sin(r)}{\cos(r)}\right) \\
&= e\left(\sin(i) - \cos(i)\,\frac{\sin(i)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(i)}}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{\Delta_t = e\sin(i)\left(1 - \frac{\cos(i)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(i)}}\right)}$$

Exercice n°6 • Principe de Fermat ★★⯪

1) Le temps de trajet est la somme du temps mis par la lumière pour aller de A à I et de I à B. Ainsi,

$$t(x) = \frac{AI}{c/n_1} + \frac{IB}{c/n_2} = \frac{n_1}{c}\sqrt{(x-x_A)^2 + y_A^2} + \frac{n_2}{c}\sqrt{(x_B-x)^2 + y_B^2}$$

2) Pour minimiser la fonction $t(x)$, il faut chercher lorsque la dérivée s'annule.

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dx} = 0 &= \frac{n_1}{c}\frac{2\,(x-x_A)}{2\sqrt{(x-x_A)^2 + y_A^2}} + \frac{n_2}{c}\frac{-2\,(x_B-x)}{2\sqrt{(x_B-x)^2 + y_B^2}} \\
&= n_1\sin(i_1) - n_2\sin(i_2)
\end{aligned}$$

On retrouve loi de Snell-Descartes de la réfraction :

$$\boxed{n_1\sin(i_1) = n_2\sin(i_2)}$$

3) Le raisonnement est rigoureusement le même en posant $n_1 = n_2$ (même indice pour les points A et C). On en déduit:

$$\sin(i_1) = \sin(i_2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_1 = i_2}$$

Exercice n°7 • Étude d'un arc en ciel ★★★

1) Loi de Snell-Descartes : $\boxed{n_1\sin(i_1) = n_2\sin(i_2)}$

2) L'angle i_2 et maximal lorsque $i_1 = \pi/2$. Ainsi,

$$n_1\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = n_2\sin(i_{2,max}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{2,max} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)}$$

3) Non, il existe un angle limite.

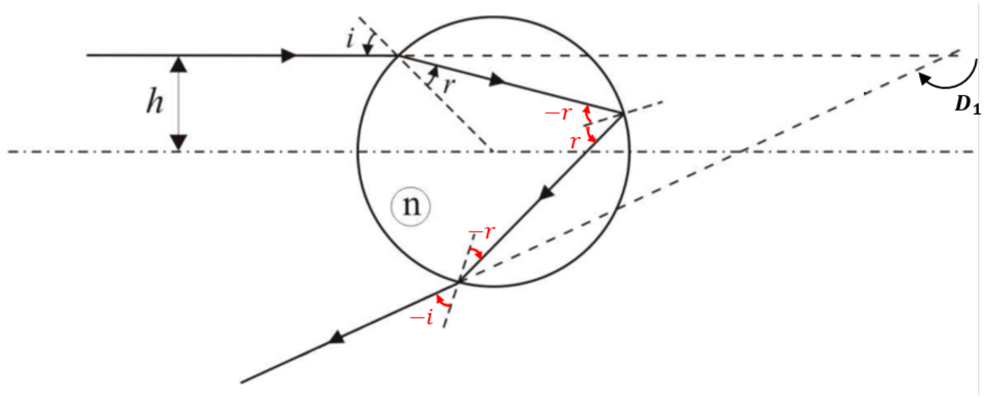
$$n_1\sin(i_{1,lim}) = n_2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{1,lim} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}$$

4) La déviation vaut : $\boxed{D = i_2 - i_1}$.

5) Loi de Snell-Descartes (attention, angles orientés) : $\boxed{i = -r}$.

6) La déviation vaut : $\boxed{D' = \pi - 2i}$.

7) Tous les angles (à orienter de la normale vers le rayon) à l'intérieur de la goutte valent $\pm r$ car les triangles sont isocèles. L'angle de sortie vaut $-i$.



8) La déviation D_1 est la somme de la déviation d'une réfraction, d'une réflexion et d'un autre réfraction.

$$D_1 = (r-i) + (\pi - 2\cdot(-r)) + ((-i) - (-r)) = \boxed{4r - 2i + \pi}$$

9) On a :

$$\sin(i) = \frac{h}{R} = x \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = \arcsin(x)}$$

De plus :

$$\sin(i) = n\sin(r) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{r = \arcsin(x/n)}$$

On en déduit :

$$\boxed{D_1(x) = 4\arcsin(x/n) - 2\arcsin(x) + \pi}$$

10) Le maximum de $\theta(x)$ est obtenu pour (on prend la solution positive à la dernière étape) :

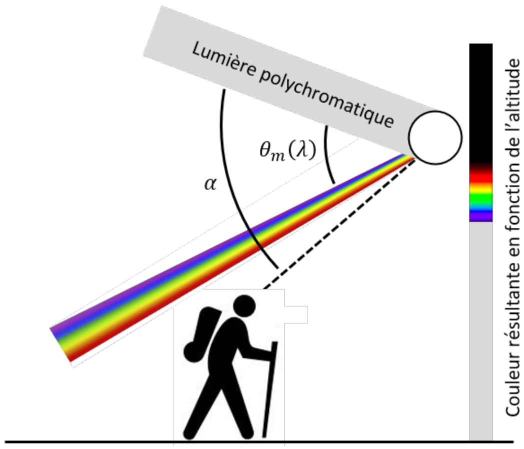
$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dx} = 0 \quad & \Rightarrow \quad \frac{4}{n\sqrt{1-\left(\frac{x_m}{n}\right)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x_m^2}} = 0 \\ & \Rightarrow \quad 4\left(1-x_m^2\right) = n^2 - x_m^2 \\ & \Rightarrow \quad 3\,x_m^2 = 4 - n^2 \\ & \Rightarrow \quad \boxed{x_m = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}}\end{aligned}$$

11) AN : $\boxed{x_m = 0,86}$ et $\boxed{\theta_m = 41,5\,°}$.

12) C'est un milieu dispersif.

13) On trouve $\theta_{m,v} = 40,6\,°$ pour le violet et $\theta_{m,r} = 42,4\,°$ pour le rouge soit un écart de $\boxed{\Delta\theta = 1,8\,°}$.

14) La déviation calculée précédemment dépend de l'indice de réfraction, qui dépend lui-même de la longueur d'onde dans le vide de la radiation considéré. Différentes radiations seront ainsi déviées différemment.



Les rayons du soleil (à l'infini) arrivent tous sous le même angle et attaquent des gouttes de rayons différents sur toute une plage de hauteur allant de $x = -1$ à $x = +1$. À cause du phénomène de dispersion, les différentes radiations sont déviées sous différents angles $\in [0; \theta_m]$, avec θ_m qui dépend de la longueur d'onde. Attention, sur le schéma, on ne représente que l'angle θ_m pour chaque λ.

On note $\theta_{m,max}$ la déviation maximale la plus grande (obtenue avec le rouge) et $\theta_{m,min}$ la déviation maximale la plus petite (obtenue avec le violet). On note α l'angle entre un observateur et le rayon incident.

On peut distinguer trois cas de figure :

- Pour un angle $\alpha > \theta_{m,max}$ (goutte très haute dans le ciel, c'est le cas de la goutte du schéma), aucun rayon n'est reçu. Sur l'image, cela se traduit par une zone sombre au-delà de l'arc rouge.
- Pour un angle $\alpha < \theta_{m,min}$ (goutte très basse dans le ciel), toutes les couleurs sont reçues, l'œil effectue une synthèse et perçoit une lumière résultante blanche. Sur l'image, cela se traduit par une zone lumineuse blanchâtre à l'intérieur de l'arc violet.
- Pour un angle $\theta_{m,min} < \alpha < \theta_{m,max}$, les couleurs sont coupées une à une au fur et à mesure que α augmente. Avant d'être coupée, une couleur nous paraît plus intense car il y a un phénomène d'accumulation des rayons lumineux autour de θ_m (forte densité spectrale). On voit donc une succession d'arcs des différentes couleurs.

La taille de la goutte n'aura donc pas d'influence, de même que sa position. En effet, deux gouttes vont renvoyer des rayons sous le même angle et ces rayons iront sur la même cellule photoréceptrice de l'œil.